Défi Suites 01 (u_n) est une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r telle que : $u_{10} = 12$ et $u_{15} = 42$: que valent u_0 et r ?

Corrigé

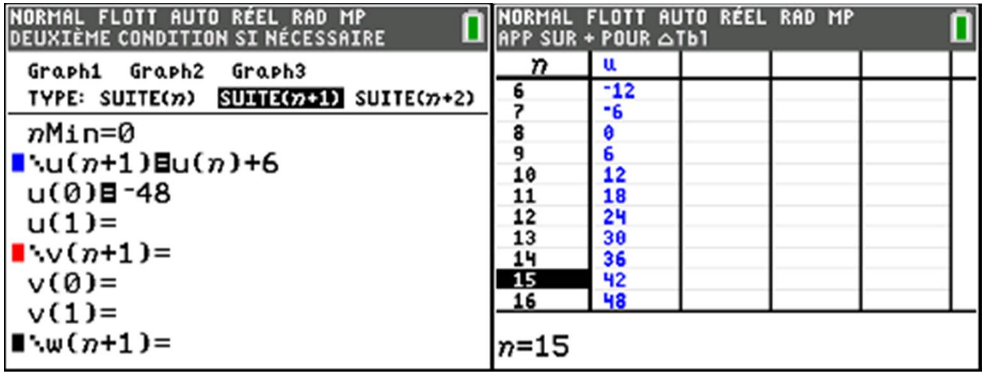
(u_n) est arithmétique donc : $u_{15} = u_{10} + (15 - 10) \times r$.
Or, $u_{15} = 42$ et $u_{10} = 12$, donc :

$$\begin{aligned} & 42 = 12 + 5r \\ \Leftrightarrow\ & 42 - 12 = 5r \\ \Leftrightarrow\ & 30 = 5r \\ \Leftrightarrow\ & \frac{30}{5} = r \\ \Leftrightarrow\ & 6 = r \end{aligned}$$

De même, $u_{10} = u_0 + (10 - 0) \times r$, or $u_{10} = 12$ et $r = 6$ donc :

$$\begin{aligned} & 12 = u_0 + 10 \times 6 \\ \Leftrightarrow\ & 12 = u_0 + 60 \\ \Leftrightarrow\ & 12 - 60 = u_0 \\ \Leftrightarrow\ & -48 = u_0 \end{aligned}$$

Conclusion : $u_0 = -48$ et $r = 6$.



Défi Suites 02 (u_n) est une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r telle que : $u_3 + u_4 + u_5 = 33$ et $u_8 + u_9 = 35{,}5$: que valent u_0 et r ?

Corrigé

La suite (u_n) est arithmétique de premier terme u_0 et de raison r donc, pour tout entier naturel n, on a : $u_n = u_0 + nr$.
On obtient en particulier :
$u_3 = u_0 + 3r, u_4 = u_0 + 4r$ et $u_5 = u_0 + 5r$ donc :

$$u_3 + u_4 + u_5 = u_0 + 3r + u_0 + 4r + u_0 + 5r = 3u_0 + 12r$$

Or, $u_3 + u_4 + u_5 = 33$ donc :

$$3u_0 + 12r = 33 \Leftrightarrow 3(u_0 + 4r) = 33 \Leftrightarrow u_0 + 4r = \frac{33}{3} \Leftrightarrow u_0 + 4r = 11$$

De même, on obtient : $u_8 = u_0 + 8r$ et $u_9 = u_0 + 9r$, donc :

$$u_8 + u_9 = u_0 + 8r + u_0 + 9r = 2u_0 + 17r$$

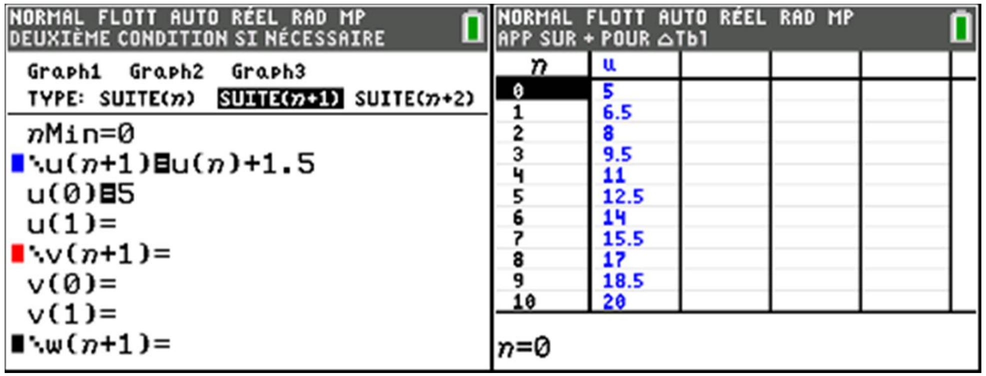
Or, $u_8 + u_9 = 35{,}5$ donc : $2u_0 + 17r = 35{,}5$.

Il s'agit donc de résoudre le système : $\begin{cases} u_0 + 4r = 11 \\ 2u_0 + 17r = 35{,}5 \end{cases}$

En isolant u_0 dans la première équation : $u_0 = 11 - 4r$ $(*)$, puis en remplaçant dans l'autre équation :

$$\begin{aligned} & 2(11 - 4r) + 17r = 35{,}5 \\ \Leftrightarrow\ & 22 - 8r + 17r = 35{,}5 \\ \Leftrightarrow\ & 22 + 9r = 35{,}5 \\ \Leftrightarrow\ & 9r = 35{,}5 - 22 \\ \Leftrightarrow\ & 9r = 13{,}5 \\ \Leftrightarrow\ & r = \frac{13{,}5}{9} \\ \Leftrightarrow\ & r = 1{,}5 \end{aligned}$$

Puis en remplaçant dans $(*)$: $u_0 = 11 - 4 \times 1{,}5 = 11 - 6 = 5$.
Conclusion : $\boldsymbol{u_0 = 5}$ et $\boldsymbol{r = 1{,}5}$.



$u_3 + u_4 + u_5 = 9{,}5 + 11 + 12{,}5 = 33$ ✓ et $u_8 + u_9 = 17 + 18{,}5 = 35{,}5$ ✓

Défi Suites 03

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$u_n = \frac{5n + 3}{n + 2}$$

Étudier le sens de variation de la suite (u_n).

Corrigé

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
&u_{n+1} - u_n \\
&= \frac{5(n+1)+3}{n+1+2} - \frac{5n+3}{n+2} \\
&= \frac{5n+5+3}{n+3} - \frac{5n+3}{n+2} \\
&= \frac{5n+8}{n+3} - \frac{5n+3}{n+2} \\
&= \frac{(5n+8)(n+2)}{(n+3)(n+2)} - \frac{(5n+3)(n+3)}{(n+2)(n+3)} \\
&= \frac{5n^2+10n+8n+16}{(n+3)(n+2)} - \frac{5n^2+15n+3n+9}{(n+2)(n+3)} \\
&= \frac{5n^2+18n+16}{(n+3)(n+2)} - \frac{5n^2+18n+9}{(n+2)(n+3)} \\
&= \frac{5n^2+18n+16-(5n^2+18n+9)}{(n+2)(n+3)} \\
&= \frac{5n^2+18n+16-5n^2-18n-9}{(n+2)(n+3)} \\
&= \frac{7}{(n+2)(n+3)}
\end{aligned}$$

On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = \frac{7}{(n+2)(n+3)}$$

Or, $n+2 > 0, n+3 > 0$ donc $(n+2)(n+3) > 0$

et comme $7 > 0$ on en déduit :

$$\frac{7}{(n+2)(n+3)} > 0$$

On en déduit que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ donc la suite (u_n) est croissante.

Défi Suites 04 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n^2 + n + 1$.

- (u_n) est-elle arithmétique, géométrique, ni l'un ni l'autre ?
- la suite (u_n) est-elle croissante, décroissante, nu l'un ni l'autre ?
- à l'aide d'un programme Python déterminer le plus petit entier naturel n_0 tel que : $u_{n_0} \geqslant 1\ 000$

Corrigé

• nature de la suite (u_n)

$u_0 = 0^2 + 0 + 1 = 1$, $u_1 = 1^2 + 1 + 1 = 3$, $u_2 = 2^2 + 2 + 1 = 7$

D'une part, on a :

$u_1 - u_0 = 3 - 1 = 2$ et $u_2 - u_1 = 7 - 3 = 4$

On constate que $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$ donc la suite (u_n) n'est pas arithmétique.

D'autre part, on a :

$$\frac{u_1}{u_0} = \frac{3}{1} = 3 \text{ et } \frac{u_2}{u_1} = \frac{7}{3}$$

On constate que $\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$ donc la suite (u_n) n'est pas géométrique.

Conclusion : la suite (u_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.

• sens de variation de la suite (u_n)

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
&u_{n+1} - u_n \\
&= (n+1)^2 + (n+1) + 1 - (n^2 + n + 1) \\
&= n^2 + 2n + 1 + n + 1 + 1 - n^2 - n - 1 \\
&= 2n + 2
\end{aligned}$$

On a donc : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = 2n + 2$.

Or, $2n + 2 > 0$ donc on en déduit que : $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$.

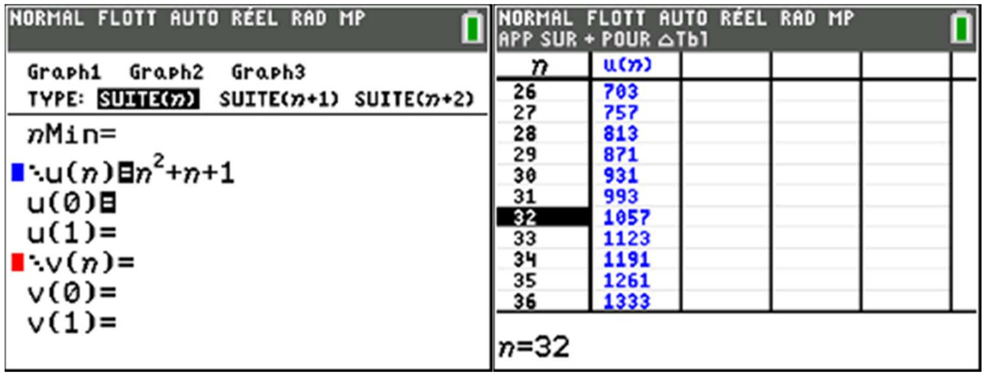
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ donc la suite (u_n) est croissante.

• plus petit entier naturel n_0 tel que : $u_{n_0} \geqslant 1\ 000$

```python
def u(n:int):
    return n**2+n+1
n=0
while u(n)<1000:
    n=n+1
print("n_0=",n)
```

```
>>> %Run '1E défi 04 suites .py'
 n_0= 32
```

On obtient $n_0 = 32$.

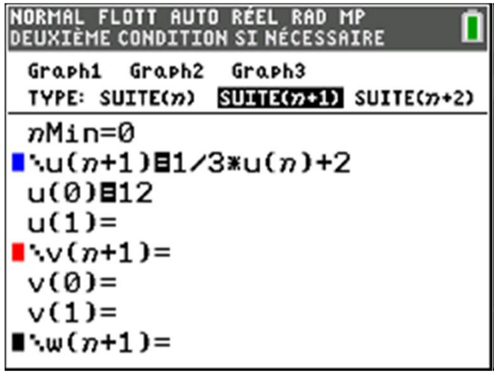


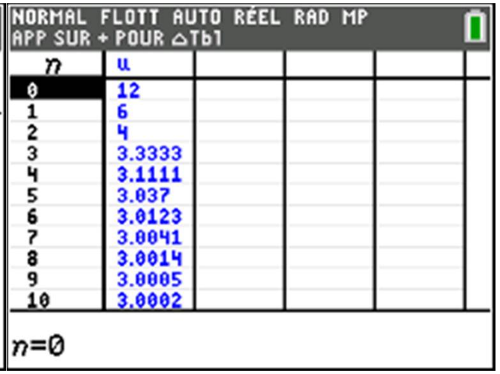
Défi Suites 05 On pose $u_0 = 12$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$$

Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

Corrigé





Il semble que la suite (u_n) soit décroissante.

Déterminons la nature de (u_n).

• $u_1 - u_0 = 6 - 12 = -6$ et $u_2 - u_1 = 4 - 6 = -2$ donc $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$ par conséquent la suite (u_n) n'est pas arithmétique

• $\frac{u_1}{u_0} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ et $\frac{u_2}{u_1} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ donc $\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$ par conséquent (u_n) n'est pas géométrique

Conclusion : la suite (u_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.

On peut s'intéresser à la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $v_n = u_n - 3$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1} - 3}{u_n - 3} = \frac{\frac{1}{3}u_n + 2 - 3}{u_n - 3} = \frac{\frac{1}{3}u_n - 1}{u_n - 3} = \frac{\frac{1}{3}(u_n - 3)}{u_n - 3} = \frac{1}{3}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{3}$ et $\frac{1}{3}$ est une constante donc (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{3}$. On a : $v_n = v_0 \times q^n$ $(cours)$, or, on a d'une part $q = \frac{1}{3}$ et d'autre part $v_0 = u_0 - 3 = 12 - 3 = 9$, donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 9 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 3$ donc :

$$9 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = u_n - 3 \Leftrightarrow 9 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n + 3 = u_n$$

On a donc :

$$\boldsymbol{\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 9 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n + 3}$$

Pour $n = 2$, cette formule donne :

$$u_2 = 9 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 3 = 9 \times \frac{1}{9} + 3 = 1 + 3 = 4$$

ce qui est en accord avec la copie d'écran précédente.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
&u_{n+1} - u_n \\
&= 9 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} + 3 - \left(9 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n + 3\right) \\
&= 9 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n \times \left(\frac{1}{3}\right)^1 + 3 - 9 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n - 3 \\
&= 9 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n \times \frac{1}{3} - 9 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n \times 1 \\
&= 9 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n \times \left[\frac{1}{3} - 1\right] \\
&= 9 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n \times \left(-\frac{2}{3}\right) \\
&= -\frac{9 \times 2}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n \\
&= -6 \times \frac{1^n}{3^n} \\
&= -\frac{6}{3^n}
\end{aligned}$$

On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = -\frac{6}{3^n}$$

Pour $n = 1$ cette formule donne : $u_2 - u_1 = -\frac{6}{3^1} = -2$

ce qui est en accord avec : $u_2 - u_1 = 4 - 6 = -2$.

Or, $3^n > 0$ et $6 > 0$ donc : $-\frac{6}{3^n} < 0$, par conséquent : $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$.

On a donc : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ donc la suite $(\boldsymbol{u_n})$ **est décroissante**.

Défi Suites 06

Soit (u_n) la suite arithmétique de raison 0,2 et de premier terme $u_0 = 3$

- Calculer : $S_2 = u_0 + u_1 + u_2$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note S_n la somme des termes de (u_n) de u_0 à u_n :

$$S_n = u_0 + \cdots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = 0{,}1n^2 + 3{,}1n + 3$.
En déduire le plus petit entier naturel n_0 pour lequel la somme des termes de la suite (u_n) de u_0 à u_n dépasse 1 200.

Corrigé

(u_n) ARITH, $u_0 = 3$, raison $= 0{,}2$

- Calculons S_2 :

$$S_2 = u_0 + u_1 + u_2 = \sum_{k=0}^{2} u_k$$

Or, $u_1 = u_0 + 0{,}2 = 3 + 0{,}2 = 3{,}2$ et $u_2 = u_1 + 0{,}2 = 3{,}2 + 0{,}2 = 3{,}4$
donc : $S_2 = 3 + 3{,}2 + 3{,}4 = 9{,}6$.
Conclusion : $\boldsymbol{S_2 = 9,6}$.

- Pour tout entier naturel n, S_n la somme des termes de (u_n) de u_0 à u_n,

Montrons que : $S_n = 0{,}1n^2 + 3{,}1n + 3$.
La formule de la somme des premiers termes d'une suite arithmétique donne :

$$u_0 + \cdots + u_n = \frac{(u_0 + u_n) \times (n+1)}{2}$$

Or, $u_0 = 3$ et $u_n = u_0 + n \times r = 3 + n \times 0{,}2 = 0{,}2n + 3$, donc :

$$S_n = \frac{(3 + 0{,}2n + 3)(n+1)}{2} = \frac{(0{,}2n + 6)(n+1)}{2} = \frac{2(0{,}1n + 3)(n+1)}{2}$$
$$= (0{,}1n + 3)(n+1) = 0{,}1n^2 + 0{,}1n + 3n + 3 = 0{,}1n^2 + 3{,}1n + 3.$$

On a donc bien : $\boldsymbol{\forall n \in \mathbb{N}, S_n = 0,1n^2 + 3,1n + 3}$.

Pour $n = 2$ la formule précédente donne
$S_2 = 0{,}1 \times (2)^2 + 3{,}1 \times 2 + 3 = 0{,}1 \times 4 + 6{,}2 + 3 = 0{,}4 + 6{,}2 + 3 = 9{,}6$
on retrouve bien le résultat obtenu au premier point

Déterminons le plus petit entier naturel n_0 tel que la somme des termes de la suite (u_n) de u_0 à u_n dépasse 1 200.
Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $0{,}1x^2 + 3{,}1x + 3 > 1\,200$.
Elle s'écrit aussi : $0{,}1x^2 + 3{,}1x + 3 - 1\,200 > 0$, c'est-à-dire :

$$0{,}1x^2 + 3{,}1x - 1\,197 > 0$$

$0{,}1x^2 + 3{,}1x - 1\,197$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = 0{,}1$, $b = 3{,}1$ et $c = -1\,197$, de discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 3{,}1^2 - 4(0{,}1)(-1\,197) = 488{,}41$$
$$\sqrt{\Delta} = 22{,}1$$

$\Delta > 0$ donc $0{,}1x^2 + 3{,}1x - 1\,197$ admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3{,}1 - 22{,}1}{2(0{,}1)} = -126$$
$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3{,}1 + 22{,}1}{2(0{,}1)} = 95$$

On en déduit que pour $0 \leqslant n \leqslant 95$ on a : $S_n \leqslant 1\,200$ et pour $n \geqslant 96$, on a : $S_n > 1\,200$ donc $\boldsymbol{n_0 = 96}$.

Défi Suites 07

Soient a et b deux constantes réelles et (u_n) la suite définie par son premier terme u_0 et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = a \times u_n + b$.

1. **Dans cette question, on suppose $\boldsymbol{a = 1}$.**
   Déterminer la nature de (u_n) puis exprimer u_n en fonction de n et u_0.
2. **Dans cette question, on suppose $\boldsymbol{a \neq 1}$.**
   a. Montrer que l'équation $x = ax + b$ admet une unique solution.
   Dans toute la suite, on note c cette solution.
   b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = u_n - c$.
   Montrer que la suite (v_n) est géométrique, exprimer v_n en fonction de n, u_0 et c. En déduire u_n en fonction de n, u_0, a et b.

Corrigé

u_0 donné, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = a \times u_n + b$

1. $\boldsymbol{a = 1}$

• **nature de la suite** $(\boldsymbol{u_n})$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$a = 1$ donc $u_{n+1} = 1 \times u_n + b = u_n + b$.

D'où : $u_{n+1} - u_n = u_n + b - u_n = b$.

On a donc : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = b$ et b est une constante donc (u_n) est arithmétique de raison b.

• **expression de** $\boldsymbol{u_n}$ **en fonction de** $\boldsymbol{n}$ **et** $\boldsymbol{u_0}$

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n = u_0 + n \times r\ (cours)$, or $r = b$, donc $u_n = u_0 + br$.

Conclusion : $\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{u_n = u_0 + br}$.

2. $\boldsymbol{a \neq 1}$

a. Remarquons d'abord que $a \neq 1$ donc $1 - a \neq 0$.

Pour $a \neq 1$ on a les équivalences :

$$x = a \times x + b \Leftrightarrow x - ax = b \Leftrightarrow x(1-a) = b \Leftrightarrow x = \frac{b}{1-a}$$

Donc l'équation de départ admet une unique solution :

$$\boldsymbol{c = \frac{b}{1-a}}$$

b. $\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{v_n = u_n - c}$

Montrons que la suite $(\boldsymbol{v_n})$ **est géométrique.**

c est solution de $x = ax + b$ donc $c = ac + b\ (*)$.

Méthode 1 (rédaction acceptée en première)

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1} - c}{u_n - c} = \frac{au_n + b - c}{u_n - c} = \frac{au_n + b - (ac + b)}{u_n - c} \quad \text{(en utilisant } (*))$$

$$= \frac{au_n + b - ac - b}{u_n - c} = \frac{au_n - ac}{u_n - c} = \frac{a\cancel{(u_n - c)}}{\cancel{u_n - c}} = a$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{v_{n+1}}{v_n} = a$ et a est une constante donc la suite (v_n) est géométrique de raison a.

Méthode 2

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$v_{n+1} = u_{n+1} - c = au_n + b - (ac + b) = au_n + b - ac - b = au_n - ac$
$= a(u_n - c) = av_n$

On a donc : $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = a \times v_n$ et a est une constante donc la suite (v_n) est géométrique de raison a.

• $\boldsymbol{v_n}$ **en fonction de** $\boldsymbol{n}$ **et** $\boldsymbol{u_0}$ **puis** $\boldsymbol{u_n}$ **en fonction de** $\boldsymbol{n}$ **et** $\boldsymbol{u_0}$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

(v_n) est géométrique donc $v_n = v_0 \times q^n\ \ (cours)$

Or, $v_0 = u_0 - c$ et $q = a$ donc : $v_n = (u_0 - c) \times a^n$.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = (u_0 - c) \times a^n$.

Or, $v_n = u_n - c$, donc : $u_n = v_n + c$. Avec l'expression de v_n, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (u_0 - c) \times a^n + c$$

Or, $c = \frac{b}{1-a}$ donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \left(u_0 - \frac{b}{1-a}\right) \times a^n + \frac{b}{1-a}$$

Défi Suites 08

Pour tout entier naturel non nul n on note S_n la somme des n premiers nombres impairs : $S_1 = 1$, $S_2 = 1 + 3$, $S_3 = 1 + 3 + 5$ etc.

1. Vérifier que S_1, S_2, S_3 et S_4 sont des carrés de certains entiers.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on note u_n le n-ième nombre impair : $u_1 = 1$, $u_2 = 3$, $u_3 = 5$ etc.

2. **a.** Donner sans justification la nature de la suite (u_n), en déduire u_n en fonction de n.

b. Que doit-on penser de l'affirmation :
« pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, S_n est le carré d'un certain entier » ?

Corrigé

1. Vérifier que S_1, S_2, S_3 et S_4 sont des carrés de certains entiers.

$$S_1 = 1 = 1^2$$
$$S_2 = 1 + 3 = 4 = 2^2$$
$$S_3 = 1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$$

Les nombres S_1, S_2 et S_3 sont bien des carrés de certains entiers.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on note u_n le n-ième nombre impair : $u_1 = 1$, $u_2 = 3$, $u_3 = 5$ etc.

2. a. Donner sans justification la nature de la suite (u_n), en déduire u_n en fonction de n.

Deux nombres impairs qui se suivent sont espacés du nombre 2 donc la suite (u_n) est arithmétique de raison $r = 2$.
Comme le premier nombre impair est 1, le premier terme de la suite (u_n) est $u_1 = 1$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_1 + (n-1) \times r \ (cours)$
Or, $u_1 = 1$ et $r = 2$, donc :
$$u_n = 1 + (n-1) \times 2 = 1 + 2n - 2 = 2n - 1$$
Conclusion : pour tout $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^*$, $\boldsymbol{u_n = 2n - 1}$.

b. Que doit-on penser de l'affirmation :
« pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, S_n est le carré d'un certain entier » ?

La suite (u_n) est arithmétique donc, d'après le cours :
$$u_1 + \cdots + u_n = \frac{(u_1 + u_n) \times n}{2}$$
Or, $u_1 = 1$ et $u_n = 2n - 1$, donc :
$$\frac{(u_1 + u_n) \times n}{2} = \frac{(1 + 2n - 1) \times n}{2} = \frac{2n \times n}{2} = \frac{2 \times n^2}{2} = n^2$$
On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = n^2$.

L'affirmation :
« pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, S_n est le carré d'un certain entier » est donc vraie.

Défi Suites 09

Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $r = 4$: calculer $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{50}$.

Corrigé

La suite (u_n) est arithmétique donc, d'après le cours :
$$u_0 + u_1 + \cdots + u_{50} = \frac{(u_0 + u_{50}) \times 51}{2}$$
Or, $u_0 = 1$ et $u_{50} = u_0 + (50 - 0) \times r = 1 + 50 \times 4 = 1 + 200 = 201$.
Donc :
$$S = \frac{(1 + 201) \times 51}{2} = \frac{202 \times 51}{2} = 101 \times 51 = 5\,151$$
Conclusion : $\boldsymbol{S = 5\,151}$.

Défi Suites 10

Calculer : $S = 10 + 15 + 20 + 25 + \cdots + 10\,000$.

Corrigé

S est la somme des premiers termes d'une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 10$ et de raison $r = 5$. Déterminons p tel que : $u_p = 10\,000$.
On a : $u_p = u_0 + p \times r \ (Cours)$
Or, $u_0 = 10$, $r = 5$ et $u_p = 10\,000$, donc :
$$10\,000 = 10 + p \times 5 \Leftrightarrow 10\,000 - 10 = 5p \Leftrightarrow \frac{9\,990}{5} = p \Leftrightarrow p = 1\,998$$
On a donc : $S = u_0 + \cdots + u_{1998}$.
Or, (u_n) étant arithmétique, d'après le cours on a :

$$u_0 + \cdots + u_{1999} = \frac{(u_0 + u_{1998}) \times 2\,000}{2}$$

Or, $u_0 = 10$ et $u_{1998} = 10\,000$ donc :

$$u_0 + \cdots + u_{1998} = \frac{(10 + 10\,000) \times 1\,999}{2} = 10\,004\,995$$

Finalement : $\boldsymbol{S = 10\,004\,995}$.

Défi Suites 11

Soit (u_n) la suite définie par son premier terme $u_0 = -4$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{u_n + 6}{u_n + 2}$$

1. Déterminer la nature de la suite (u_n).

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose :

$$v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 3}$$

- **a.** Démontrer que la suite (v_n) est géométrique, préciser sa raison et son premier terme.
- **b.** Exprimer v_n en fonction de n.

3. Exprimer u_n en fonction de n.

Corrigé

1. $u_0 = -4$

$$u_1 = \frac{u_0 + 6}{u_0 + 2} = \frac{-4 + 6}{-4 + 2} = \frac{2}{-2} = -1$$

$$u_2 = \frac{u_1 + 6}{u_1 + 2} = \frac{-1 + 6}{-1 + 2} = \frac{5}{1} = 5$$

On a : $u_1 - u_1 = -1 - (-4) = 3$ et $u_2 - u_1 = 5 - (-1) = 6$.

On constate que $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$ donc $(\boldsymbol{u_n})$ **n'est pas arithmétique**.

$$\frac{u_1}{u_0} = \frac{-1}{-4} = \frac{1}{4} \text{ et } \frac{u_2}{u_1} = \frac{5}{-1} = -5$$

On constate que $\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$ donc $(\boldsymbol{u_n})$ **n'est pas géométrique**.

2. a. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{u_{n+1} - 2}{u_{n+1} + 3}}{\frac{u_n - 2}{u_n + 3}} = \frac{u_{n+1} - 2}{u_{n+1} + 3} \times \frac{u_n + 3}{u_n - 2} = \frac{\frac{u_n + 6}{u_n + 2} - 2}{\frac{u_n + 6}{u_n + 2} + 3} \times \frac{u_n + 3}{u_n - 2}$$

$$= \frac{\frac{u_n + 6}{u_n + 2} - \frac{2u_n + 4}{u_n + 2}}{\frac{u_n + 6}{u_n + 2} + \frac{3u_n + 6}{u_n + 2}} \times \frac{u_n + 3}{u_n - 2} = \frac{\frac{-u_n + 2}{u_n + 2}}{\frac{4u_n + 12}{u_n + 2}} \times \frac{u_n + 3}{u_n - 2}$$

$$= \frac{-u_n + 2}{u_n + 2} \times \frac{u_n + 2}{4(u_n + 3)} \times \frac{u_n + 3}{u_n - 2} = \frac{(-u_n + 2)(u_n + 2)(u_n + 3)}{4(u_n + 2)(u_n + 3)(u_n - 2)}$$

$$= \frac{-(u_n - 2)(u_n + 2)(u_n + 3)}{4(u_n - 2)(u_n + 2)(u_n + 3)} = -\frac{1}{4}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{v_{n+1}}{v_n} = -\frac{1}{4}$ et $-\frac{1}{4}$ est une constante donc (v_n) est géométrique de raison : $-\frac{1}{4}$.

b. On a :

$$v_0 = \frac{u_0 - 2}{u_0 + 3} = \frac{-4 - 2}{-4 + 3} = \frac{-6}{-1} = 6$$

On a : $v_n = v_0 \times q^n$ $(Cours)$.

Or $v_0 = 6$ et $q = -\frac{1}{4}$, donc : $v_n = 6 \times \left(-\frac{1}{4}\right)^n$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\boldsymbol{v_n = 6 \times \left(-\frac{1}{4}\right)^n}$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 3}$$

Donc :

$$v_n(u_n + 3) = u_n - 2$$
$$v_n u_n + 3v_n = u_n - 2$$
$$u_n v_n - u_n = -2 - 3v_n$$
$$u_n(v_n - 1) = -2 - 3v_n$$
$$u_n = \frac{-2 - 3v_n}{v_n - 1}$$

$$u_n = \frac{2+3v_n}{1-v_n}$$

En utilisant v_n en fonction de n on obtient :

$$u_n = \frac{2+3\times 6\times\left(-\frac{1}{4}\right)^n}{1-6\times\left(-\frac{1}{4}\right)^n}$$

Conclusion :

$$\boldsymbol{\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{2+18\left(-\frac{1}{4}\right)^n}{1-6\left(-\frac{1}{4}\right)^n}}$$

Vérification

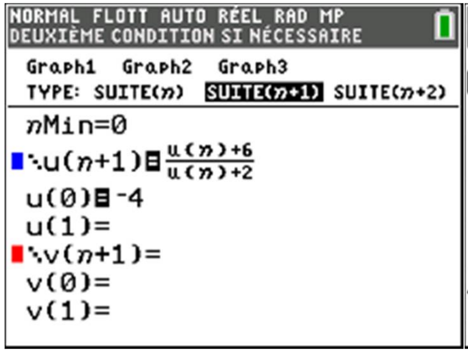
Pour $n=0$, cette formule donne :

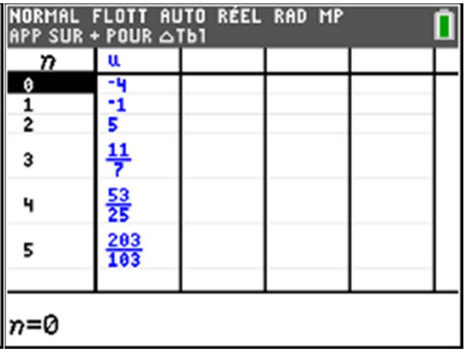
$$u_0 = \frac{2+18\left(-\frac{1}{4}\right)^0}{1-6\left(-\frac{1}{4}\right)^0} = \frac{2+18}{1-6} = \frac{20}{-5} = -4$$

Pour $n=2$, cette formule donne :

$$u_2 = \frac{2+18\left(-\frac{1}{4}\right)^2}{1-6\left(-\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{2+18\times\frac{1}{16}}{1-6\times\frac{1}{16}} = \frac{\frac{32}{16}+\frac{18}{16}}{\frac{16}{16}-\frac{6}{16}} = \frac{\frac{50}{16}}{\frac{10}{16}} = \frac{50}{16}\times\frac{16}{10} = 5$$

Les deux résultats sont conformes aux valeurs de u_0 et u_2.





Défi Suites 12

Chaque année la population d'un ville à la campagne diminue de 5% mais à la fin de l'année 100 nouveaux habitants viennent s'y établir. Il y a 1600 habitants dans cette ville au 1er janvier 2 020.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note u_n le nombre d'habitants au bout de n années ; ainsi $u_0 = 1\,600$.

1. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 0{,}95u_n + 100$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $v_n = u_n - 2\,000$.

- **a.** Calculer v_0.
- **b.** Démontrer que la suite (v_n) est géométrique et préciser sa raison.
- **c.** Exprimer v_n en fonction de n.

3. Exprimer u_n en fonction de n.

4. Démontrer que le nombre d'habitants ne va jamais décroitre.

5. Démontrer que le nombre d'habitants ne dépassera jamais 2 000 habitants.

Corrigé

1. Justifier que, pour tout $\boldsymbol{n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 0{,}95u_n + 100}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On se place n années après 2020 : il y a u_n habitants.

La population va ensuite diminuer de 5% donc on va perdre 5% de u_n habitants soit $0{,}05 \times u_n$ habitants, mais à la fin de l'année 100 nouveaux habitants vont arriver donc la population va augmenter de 100 habitants.

L'année suivante, on aura donc un nombre d'habitants égal à :

$$u_n - 0{,}05u_n + 100 = u_n(1-0{,}05) + 100 = 0{,}95u_n + 100$$

Autrement dit : $u_{n+1} = 0{,}95u_n + 100$.

On a donc bien : $\boldsymbol{\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 0{,}95u_n + 100}$.

2. Pour tout $\boldsymbol{n \in \mathbb{N}, v_n = u_n - 2\,000}$.

a. Calculer $\boldsymbol{v_0}$.

$v_0 = u_0 - 2\,000 = 1\,600 - 2\,000 = -400$.

Conclusion : $\boldsymbol{v_0 = -400}$.

b. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique et préciser sa raison.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1} - 2\,000}{u_n - 2\,000} = \frac{0{,}95u_n + 100 - 2\,000}{u_n - 2\,000} = \frac{0{,}95u_n - 1\,900}{u_n - 2\,000}$$

$$= \frac{0{,}95\left(u_n - \frac{1900}{0{,}95}\right)}{u_n - 2\,000} = \frac{0{,}95(u_n - 2\,000)}{u_n - 2\,000} = 0{,}95$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{v_{n+1}}{v_n} = 0{,}95$ et $0{,}95$ est une constante donc

(v_n) est géométrique de raison $0,95$.

c. Exprimer v_n en fonction de n.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$v_n = v_0 \times q^n$ $(Cours)$

Or, $v_0 = -400$ et $q = 0{,}95$ donc $v_n = -400 \times 0{,}95^n$.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{v_n = -400 \times 0,95^n}$.

3. Exprimer u_n en fonction de n.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a : $v_n = u_n - 2\,000$ donc $u_n = v_n + 2\,000$.

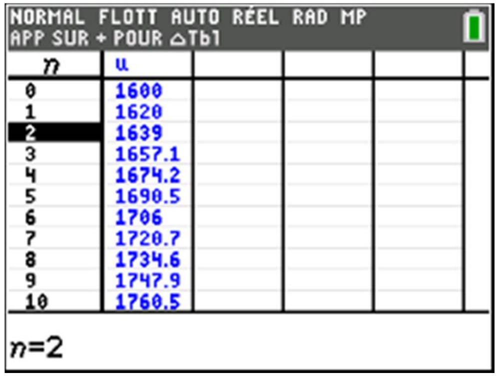
Or, $v_n = -400 \times 0{,}95^n$ donc $u_n = -400 \times 0{,}95^n + 2\,000$.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{u_n = -400 \times 0,95^n + 2\,000}$.

vérification

La formule précédente donne : $u_2 = -400 \times 0{,}95^2 + 2\,000 = 1\,639$

ce qui est conforme à ce que la calculatrice détermine directement :



4. Étudier le sens de variation de la suite (u_n).

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$u_{n+1} - u_n$

$= -400 \times 0{,}95^{n+1} + 2\,000 - (-400 \times 0{,}95^n + 2\,000)$

$= -400 \times 0{,}95^n \times 0{,}95 + 2\,000 + 400 \times 0{,}95^n - 2\,000$

$= -400 \times 0{,}95^n \times 0{,}95 + 400 \times 0{,}95^n \times 1$

$= 400 \times 0{,}95^n(-0{,}95 + 1)$

$= 400 \times 0{,}95^n \times 0{,}05$

$= 400 \times 0{,}05 \times 0{,}95^n$

$= 20 \times 0{,}95^n$

On a donc : $\boldsymbol{\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = 20 \times 0,95^n}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $20 > 0$ et $0{,}95^n > 0$ donc $20 \times 0{,}95^n > 0$

On en déduit que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ donc la suite $(\boldsymbol{u_n})$ **est croissante**.

On en déduit que le nombre d'habitants va toujours aller en augmentant, donc qu'**il ne va jamais décroitre**.

5. Démontrer que le nombre d'habitants ne dépassera jamais $2\,000$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a : $u_n - 2\,000 = -400 \times 0{,}95^n + 2\,000 - 2\,000 = -400 \times 0{,}95^n$

Or : $-400 < 0$ et $0{,}95^n$ donc : $-400 \times 0{,}95^n < 0$ autrement dit :

$u_n - 2\,000 < 0$, ou encore : $u_n < 2\,000$.

Le nombre d'habitants ne dépassera donc jamais $2\,000$.

Défi Suites 13

Soit (u_n) la suite définie par son premier terme $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{4 + u_n}{5 - u_n}$$

1. Calculer u_1 et u_2, en déduire la nature de la suite (u_n).
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose :

$$v_n = \frac{1}{2 - u_n}$$

   a. Calculer v_0, v_1 et v_2, émettre une conjecture sur la nature de la suite (v_n).
   b. Démontrer cette conjecture.
   c. Exprimer v_n en fonction de n.

3. Déduire de **2.c.** que pour tout entier naturel n, on a :

$$u_n = \frac{2n + 3}{n + 3}$$

4. Démontrer que la suite (u_n) est strictement croissante.
5. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < 2$.
6. À l'aide d'un programme Python , déterminer le plus petit entier naturel n_0 tel que : $u_{n_0} \geqslant 1,99$.

Corrigé

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{4 + u_n}{5 - u_n}$$

1. Calculer u_1 et u_2.

$$u_1 = \frac{4 + u_0}{5 - u_0} = \frac{4 + 1}{5 - 1} = \mathbf{\frac{5}{4}}$$

$$u_2 = \frac{4 + \frac{5}{4}}{5 - \frac{5}{4}} = \frac{\frac{21}{4}}{\frac{15}{4}} = \frac{21}{4} \times \frac{4}{15} = \frac{3 \times 7 \times 4}{4 \times 5 \times 3} = \mathbf{\frac{7}{5}}$$

La suite (u_n) est-elle arithmétique, géométrique, ni l'un ni l'autre ?

On a d'une part :

$$u_1 - u_0 = \frac{5}{4} - 1 = \frac{5}{4} - \frac{4}{4} = \mathbf{\frac{1}{4}}$$

$$u_2 - u_1 = \frac{7}{5} - \frac{5}{4} = \frac{28}{20} - \frac{25}{20} = \mathbf{\frac{3}{5}}$$

On constate que $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$ donc $(\boldsymbol{u_n})$ **n'est pas arithmétique**.

D'autre part, on a :

$$\frac{u_1}{u_0} = \frac{\frac{5}{4}}{1} = \frac{5}{4}$$

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{\frac{7}{5}}{\frac{5}{4}} = \frac{7}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{7 \times 4}{5 \times 5} = \frac{28}{25}$$

On constate que : $\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$ donc $(\boldsymbol{u_n})$ **n'est pas géométrique**.

2. Pour tout $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$ on pose :

$$\boldsymbol{v_n = \frac{1}{2 - u_n}}$$

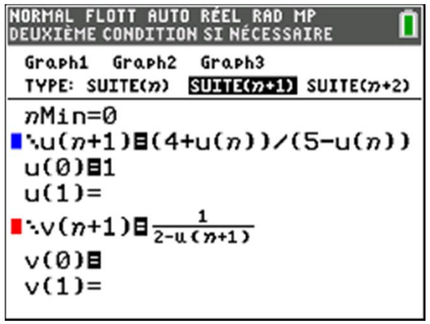
a. Calculer $\boldsymbol{v_0}$, $\boldsymbol{v_1}$ et $\boldsymbol{v_2}$, émettre une conjecture sur la nature de la suite $(\boldsymbol{v_n})$ puis démontrer cette conjecture.

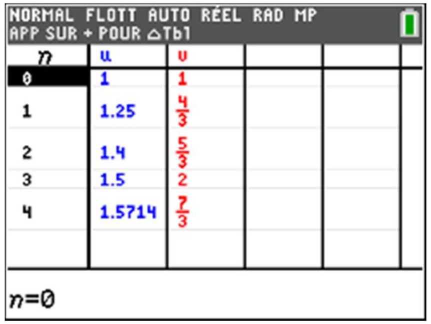
$$v_0 = \frac{1}{2 - u_0} = \frac{1}{2 - 1} = \frac{1}{1} = \mathbf{1}$$

$$v_1 = \frac{1}{2 - u_1} = \frac{1}{2 - \frac{5}{4}} = \frac{1}{\frac{8}{4} - \frac{5}{4}} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \mathbf{\frac{4}{3}}$$

$$v_2 = \frac{1}{2 - u_2} = \frac{1}{2 - \frac{7}{5}} = \frac{1}{\frac{10}{5} - \frac{7}{5}} = \frac{1}{\frac{3}{5}} = \mathbf{\frac{5}{3}}$$

Vérification





On a :

$$v_1 - v_0 = \frac{4}{3} - 1 = \frac{4}{3} - \frac{3}{3} = \frac{1}{3}$$
$$v_2 - v_1 = \frac{5}{3} - \frac{4}{3} = \frac{1}{3}$$

On peut émettre la **conjecture « (v_n) est arithmétique de raison $\frac{1}{3}$ »**

b. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2 - u_{n+1}} - \frac{1}{2 - u_n} = \frac{1}{2 - \frac{4 + u_n}{5 - u_n}} - \frac{1}{2 - u_n}$$
$$= \frac{1}{\frac{2(5 - u_n)}{5 - u_n} - \frac{4 + u_n}{5 - u_n}} - \frac{1}{2 - u_n} = \frac{1}{\frac{10 - 2u_n - (4 + u_n)}{5 - u_n}} - \frac{1}{2 - u_n}$$
$$= \frac{1}{\frac{6 - 3u_n}{5 - u_n}} - \frac{1}{2 - u_n} = \frac{5 - u_n}{3(2 - u_n)} - \frac{1}{2 - u_n}$$
$$= \frac{5 - u_n}{3(2 - u_n)} - \frac{3 \times 1}{3(2 - u_n)} = \frac{5 - u_n - 3}{3(2 - u_n)}$$
$$= \frac{2 - u_n}{3(2 - u_n)} = \frac{1 \times (2 - u_n)}{3 \times (2 - u_n)} = \frac{1}{3}$$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{3}$ et $\frac{1}{3}$ est une constante donc :

la suite (v_n) **est arithmétique de raison $\frac{1}{3}$**.

c. Exprimer v_n en fonction de n.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on : $v_n = v_0 + n \times r$ $(cours)$, or $v_0 = 1$ et $r = \frac{1}{3}$, donc :

$$v_n = 1 + \frac{1}{3}n$$

Conclusion :

$$\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{v_n} = \frac{\boldsymbol{3+n}}{\boldsymbol{3}}$$

3. Exprimer u_n en fonction de n.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$v_n = \frac{1}{2 - u_n}$$
$$\frac{1}{v_n} = 2 - u_n$$
$$u_n = 2 - \frac{1}{v_n}$$
$$u_n = 2 - \frac{3}{3 + n}$$
$$u_n = \frac{2(3 + n)}{3 + n} - \frac{3}{3 + n}$$
$$u_n = \frac{6 + 2n - 3}{3 + n}$$
$$u_n = \frac{2n + 3}{n + 3}$$

Conclusion :

$$\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{u_n} = \frac{\boldsymbol{2n+3}}{\boldsymbol{n+3}}$$

4. Démontrer que la suite (u_n) est strictement croissante.

première méthode : utilisation du sens de variation d'une fonction

Soit f définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2x + 3}{x + 3}$$

Rappel : $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$

$$f'(x) = \frac{2(x + 3) - 1(2x + 3)}{(x + 3)^2}$$
$$f'(x) = \frac{2x + 6 - 2x - 3}{(x + 3)^2}$$
$$f'(x) = \frac{3}{(x + 3)^2}$$

Un carré est toujours positif ou nul donc le signe de $f'(x)$ est celui de son numérateur : 3, on en déduit que : $\forall x \in [0; +\infty[, f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

n et $n + 1$ appartiennent à $[0; +\infty[$, or f est strictement croissante sur cet intervalle donc elle conserve strictement le sens de la relation d'ordre sur cet intervalle : on a $n < n + 1$ donc $f(n) < f(n + 1)$.

Or, $f(n) = u_n$ et $f(n+1) = u_{n+1}$ donc : $u_n < u_{n+1}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < u_{n+1}$ donc (u_n) est strictement croissante.

<u>deuxième méthode : signe de $u_{n+1} - u_n$</u>

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
&u_{n+1} - u_n \\
&= \frac{2(n+1)+3}{n+1+3} - \frac{2n+3}{n+3} \\
&= \frac{2n+5}{n+4} - \frac{2n+3}{n+3} \\
&= \frac{(2n+5)(n+3)}{(n+4)(n+3)} - \frac{(2n+3)(n+4)}{(n+3)(n+4)} \\
&= \frac{2n^2+6n+5n+15}{(n+3)(n+4)} - \frac{2n^2+8n+3n+12}{(n+3)(n+4)} \\
&= \frac{2n^2+11n+15}{(n+3)(n+4)} - \frac{2n^2+11n+12}{(n+3)(n+4)} \\
&= \frac{2n^2+11n+15-(2n^2+11n+12)}{(n+3)(n+4)} \\
&= \frac{3}{(n+3)(n+4)}
\end{aligned}$$

Or, $n+3>0$, $n+4>0$, $(n+3)(n+4)>0$, $3>0$ donc : $\frac{3}{(n+3)(n+4)} > 0$

$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n > 0$ donc $(\boldsymbol{u_n})$ **est strictement croissante**.

5. **Démontrer que, pour tout $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{u_n < 2}$.**

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_n - 2 = \frac{2n+3}{n+3} - \frac{2(n+3)}{n+3} = \frac{2n+3}{n+3} - \frac{2n+6}{n+3} = \frac{2n+3-(2n+6)}{n+3}$$
$$= \frac{2n+3-2n-6}{n+3} = \frac{-3}{n+3}$$

$n+3>0$ et $-3<0$ donc $\frac{-3}{n+3} < 0$

$u_n - 2 < 0$ donc : $u_n < 2$.

Conclusion : $\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{u_n < 2}$.

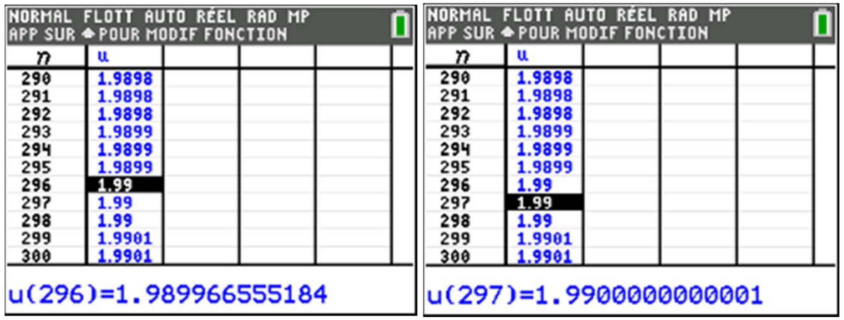
6. **À l'aide d'un programme Python , déterminer le plus petit entier naturel $\boldsymbol{n_0}$ tel que : $\boldsymbol{u_{n_0} \geqslant 1,99}$.**

```
U=1
n=0
while U<1.99:
    U=(4+U)/(5-U)
    n=n+1
print("n_0=",n-1)
```

On obtient alors : n_0=297.

Conclusion : $\boldsymbol{n_0 = 297}$.

Vérification



Défi Suites 14

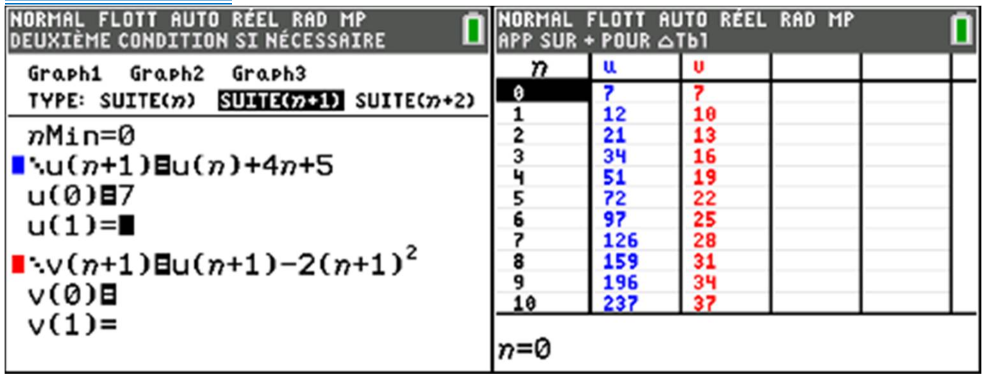
Soit (u_n) la suite de premier terme $u_0 = 7$ telle que pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = u_n + 4n + 5$.

1. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).
2. Calculer u_1 et u_2.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $v_n = u_n - 2n^2$.
   a. Calculer v_0, v_1, v_2. Émettre une conjecture sur la nature de la suite (v_n) puis démontrer cette conjecture.
   b. Exprimer v_n en fonction de n.
   c. Exprimer u_n en fonction de n.

Corrigé

$u_0 = 7$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + 4n + 5$

Avec la calculatrice



1. **Sens de variation de la suite (u_n)**

   Soit $n \in \mathbb{N}$.

   On a : $u_{n+1} - u_n = u_n + 4n + 5 - u_n = 4n + 5$.

   Or, $n \in \mathbb{N}$ donc : $4n + 5 > 0$

   Pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n > 0$ donc (u_n) **est strictement croissante**.

2. **Calculer u_1 et u_2.**

   $u_1 = u_0 + 4(0) + 5 = 7 + 5 = \mathbf{12}$

   $u_2 = u_1 + 4(1) + 5 = 12 + 4 + 5 = \mathbf{21}$

3. **Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $v_n = u_n - 2n^2$.**

   a. **Calculer v_0, v_1, v_2.**

   $v_0 = u_0 - 2(0)^2 = 7 - 0 = \mathbf{7}$

   $v_1 = u_1 - 2(1)^2 = 12 - 2 = \mathbf{10}$

   $v_2 = u_2 - 2(2)^2 = 21 - 2 \times 4 = 21 - 8 = \mathbf{13}$

   On a : $v_1 - v_0 = 10 - 7 = 3$ et $v_2 - v_1 = 13 - 10 = 3$.

   On émettre la **conjecture : « (v_n) est arithmétique de raison 3 ».**

   Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

   $v_{n+1} - v_n$
   $= u_{n+1} - 2(n+1)^2 - (u_n - 2n^2)$
   $= u_n + 4n + 5 - 2(n^2 + 2n + 1) - u_n + 2n^2$
   $= u_n + 4n + 5 - 2n^2 - 4n - 2 - u_n + 2n^2$
   $= 3$

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n = 3$ et 3 est une constante donc la suite (v_n) **est arithmétique de raison 3**.

   b. **Exprimer v_n en fonction de n.**

   Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $v_n = v_0 + nr$ $(cours)$, or $v_0 = 7$ et $r = 3$

   donc $v_n = 7 + 3n$.

   Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, \boldsymbol{v_n = 3n + 7}$.

   c. **Exprimer u_n en fonction de n.**

   Soit $n \in \mathbb{N}$.

   On a : $v_n = u_n - 2n^2$, or on a montré en **b.** que $v_n = 3n + 7$,

   donc $3n + 7 = u_n - 2n^2$, autrement dit : $3n + 7 + 2n^2 = u_n$.

   Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, \boldsymbol{u_n = 2n^2 + 3n + 7}$.

   Vérification

   Pour $n = 2$, la formule précédente donne :

   $u_2 = 2(2)^2 + 3(2) + 7 = 2 \times 4 + 6 + 7 = 8 + 6 + 7 = 21$ ✓

Défi Suites 15

Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

autrement dit, que :

$$0 + 1 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Corrigé

Posons $S = 0 + \cdots + n$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n$.
On a donc : $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.
Démontrons que la suite (u_n) est arithmétique.
Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_{n+1} - u_n = n + 1 - n = 1$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 1$ et 1 est une constante donc (u_n) est arithmétique de raison 1.
Donc, d'après le cours :

$$u_0 + \cdots + u_n = \frac{(u_0 + u_n) \times (n+1)}{2}$$

Or, $u_0 = 0$ et $u_n = n$ donc :

$$u_0 + \cdots + u_n = \frac{(0 + n) \times (n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

On a donc bien :

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Défi Suites 16

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} k^2$$

autrement dit : $S_n = 0^2 + 1^2 + \cdots + n^2$.

1. Calculer S_1, S_2 et S_3.

2. Pour tout réel x on pose $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ où a, b et c sont trois constantes pour lesquelles : $f(1) = 1$, $f(2) = 5$ et $f(3) = 14$.

a. Justifier que :

$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ 8a + 4b + 2c = 5 \\ 27a + 9b + 3c = 14 \end{cases}$$

Déterminer les valeurs de a, b et c.

b. Écrire $f(x)$ sous la forme $\frac{g(x)}{6}$ où $g(x)$ est un produit de trois facteurs du premier degré à préciser.

3. On considère la suite (u_n) telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

a. Justifier que : $u_0 = S_0$.

b. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + (n+1)^2$
et justifier que : $\forall n \in \mathbb{N}, S_{n+1} = S_n + (n+1)^2$.

Conclusion

Les suites (S_n) et (u_n) ont leurs premiers termes respectifs égaux et elles obéissent à la même relation de récurrence donc elle sont égales, par conséquent :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

autrement dit :

$$0^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

__Corrigé__

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = 0^2 + 1^2 + \cdots + n^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2$$

1. Calculer S_0, S_1, S_2 et S_3.

$S_0 = 0^2 \qquad S_1 = 0^2 + 1^2 = 1$ ² $\qquad S_2 = 0^2 + 1^2 + 2^2 = 5$

$S_3 = 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14$

2. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax^3 + bx^2 + cx, f(1) = 1, f(2) = 5$ et $f(3) = 14$

a. Justifier que :

$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ 8a + 4b + 2c = 5 \\ 27a + 9b + 3c = 14 \end{cases}$$

$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ donc :

• $f(1) = a(1)^3 + b(1)^2 + c(1) = a + b + c$
Or $f(1) = 1$ donc : $a + b + c = 1\ (*)$.

• $f(2) = a(2)^3 + b(2)^2 + c(2) = 8a + 4b + 2c$
Or $f(2) = 5$ donc : $8a + 4b + 2c = 5\ (**)$.

• $f(3) = a(3)^3 + b(3)^2 + c(3) = 27a + 9b + 3c$
Or $f(3) = 14$ donc : $27a + 9b + 3c = 14\ (***)$.

Il résulte de $(*)$, $(**)$ et $(***)$ que :

$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ 8a + 4b + 2c = 5 \\ 27a + 9b + 3c = 14 \end{cases}$$

Isolons c dans la première ligne : $c = 1 - a - b$ puis remplaçons dans les deux autres lignes du système :

$$\begin{cases} 8a + 4b + 2(1 - a - b) = 5 \\ 27a + 9b + 3(1 - a - b) = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6a + 2b = 3 \\ 24a + 6b = 11 \end{cases}$$

En multipliant par 4 la première ligne et par 3 la deuxième ligne, on obtient :

$$\begin{cases} 24a + 8b = 12 \\ 24a + 6b = 11 \end{cases}$$

puis par soustraction : $2b = 1$ autrement dit : $b = \frac{1}{2}$.

En remplaçant dans : $6a + 2b = 3$, on obtient :

$$6a + 1 = 3 \Leftrightarrow 6a = 2 \Leftrightarrow a = \frac{1}{3}$$

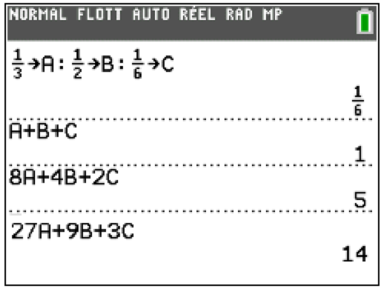
Puis en remplaçant dans : $c = 1 - a - b$, on obtient :

$$c = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{6}{6} - \frac{2}{6} - \frac{3}{6} = \frac{1}{5}$$

Finalement :

$$a = \frac{1}{3}, b = \frac{1}{2} \text{ et } c = \frac{1}{6}$$

__Vérification__



b. Écrire $f(x)$ sous la forme $\frac{g(x)}{6}$ où $g(x)$ est un produit de trois facteurs du premier degré à préciser.

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x = \frac{2x^3}{6} + \frac{3x^2}{6} + \frac{x}{6}$$
$$= \frac{2x^3 + 3x^2 + x}{6} = \frac{x(2x^2 + 3x + 1)}{6}$$

$2x^2 + 3x + 1$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = 2$, $b = 3$ et $c = 1$, de discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4(2)(1) = 9 - 8 = 1$.

$\Delta > 0$ donc $2x^2 + 3x + 1$ admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 - \sqrt{1}}{2(2)} = \frac{-3 - 1}{4} = \frac{-4}{4} = -1$$
$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 + \sqrt{1}}{2(2)} = \frac{-3 + 1}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

Donc, pour tout réel x :

$$2x^2+3x+1=2(x+1)\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

ou encore : $2x^2+3x+1=(x+1)(2x+1)$.

On a donc, pour tout réel x :

$$\boldsymbol{f(x)=\frac{x(x+1)(2x+1)}{6}}$$

3. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose :

$$\boldsymbol{u_n=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

a. Justifier que : $u_0=S_0$

$$u_0=\frac{0(0+1)(2(0)+1)}{6}=0 \text{ et } S_0=0^2=0\text{, donc : } \boldsymbol{u_0=S_0}.$$

b. Soit $n\in\mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}&u_{n+1}-u_n\\&=\frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\\&=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)-n(n+1)(2n+1)}{6}\\&=\frac{(n+1)[(n+2)(2n+3)-n(2n+1)]}{6}\\&=\frac{(n+1)(2n^2+3n+4n+6-2n^2-n)}{6}\\&=\frac{(n+1)(6n+6)}{6}\\&=\frac{(n+1)\times 6(n+1)}{6}\\&=(n+1)^2\end{aligned}$$

On a donc bien : $\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=u_n+(n+1)^2$.

D'autre part : $S_{n+1}=0^2+1^2+\cdots.+n^2+(n+1)^2$.

Or, $0^2+1^2+\cdots+n^2=S_n$ donc : $S_{n+1}=S_n+(n+1)^2$.

On a donc bien : $\boldsymbol{\forall n\in\mathbb{N}, S_{n+1}=S_n+(n+1)^2}$.

Défi Suites 17

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose :

$$S_n=\sum_{k=0}^{n}k^3=0^3+\cdots+n^3$$

1. Déterminer les valeurs de S_2 et S_3 puis comparer chacun de ces nombres avec la somme des entiers consécutifs de 0 à 2 et la somme des entiers consécutifs de 0 à 3 respectivement. En déduire une conjecture sur la forme explicite de S_n, $n\in\mathbb{N}$.

2. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose :

$$u_n=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

   a. Justifier que $u_0=S_0$.

   b. Démontrer que : $\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=u_n+(n+1)^3$.
   et justifier que : $\forall n\in\mathbb{N}, S_{n+1}=S_n+(n+1)^3$.

Conclusion

Les suites (S_n) et (u_n) ont leurs premiers termes respectifs égaux et elles obéissent à la même relation de récurrence donc elle sont égales, par conséquent :

$$\forall n\in\mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n}k^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

autrement dit :

$$\forall n\in\mathbb{N}, 0^3+\cdots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Corrigé

$$\forall n\in\mathbb{N}, S_n=\sum_{k=0}^{n}k^3=0^3+1^3+\cdots+n^3$$

1. Déterminer les valeurs de S_2 et S_3 puis comparer chacun de ces nombres avec la somme des entiers consécutifs de 1 à n.

• $S_2=0^3+1^3+2^3=0+1+8=9$
Or, $0+1+2=3$ et $3^2=9$ donc : $\boldsymbol{S_2=(0+1+2)^2}$.

• $S_3=0^3+1^3+2^3+3^3=0+1+8+27=36$
Or, $0+1+2+3=6$ et $6^2=36$, donc : $\boldsymbol{S_3=(0+1+2+3)^2}$.

En déduire une conjecture sur la forme explicite de S_n, $n \in \mathbb{N}$.

Rappelons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ donc on peut conjecturer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$S_n = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

autrement dit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$S_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \quad (conjecture)$$

2. **Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :**

$$\boldsymbol{u_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}}$$

   a. **Justifier que $u_0 = S_0$.**

   On a d'une part : $u_0 = 0$ et d'autre part $S_0 = 0^3 = 0$ donc $\boldsymbol{u_0 = S_0}$.

   b. **Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_{n+1} = u_n + (n+1)^3$.**

   Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} &u_{n+1} - u_n \\ &= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} - \frac{n^2(n+1)^2}{4} \\ &= \frac{(n+1)^2(n+2)^2 - n^2(n+1)^2}{4} \\ &= \frac{(n+1)^2[(n+2)^2 - n^2]}{4} \\ &= \frac{(n+1)^2(n^2 + 4n + 4 - n^2)}{4} \\ &= \frac{(n+1)^2 4(n+1)}{4} \\ &= \frac{4 \times (n+1)^3}{4} \\ &= (n+1)^3 \end{aligned}$$

   On a : $u_{n+1} - u_n = (n+1)^3$ autrement dit : $u_{n+1} = u_n + (n+1)^3$.

   Justifier que : $S_{n+1} = S_n + (n+1)^3$.

   $S_{n+1} = 0^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3$

   Or, $0^3 + \cdots + n^3 = S_n$ donc : $S_{n+1} = S_n + (n+1)^3$.

Défi Suites 18 **Deux suites imbriquées**

On considère les suites (a_n) et (b_n) définies par leurs premiers termes respectifs $a_0 = 1$, $b_0 = 3$ et pour tout entier naturel n :

$$a_{n+1} = 2a_n + b_n \text{ et } b_{n+1} = a_n + 2b_n$$

1. Pour tout entier naturel n on pose : $c_n = b_n - a_n$.
   a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a : $c_{n+1} = c_n$.
   b. En déduire que, pour tout entier naturel n, on a : $b_n = a_n + 2$.
2. Justifier que pour tout entier naturel n, on a : $a_{n+1} = 3a_n + 2$.
3. Pour tout entier naturel n on pose : $u_n = a_n + 1$.
   a. Calculer u_0.
   b. Montrer que (u_n) est géométrique et préciser sa raison.
   c. Exprimer u_n en fonction de n, en déduire a_n en fonction de n.
4. Exprimer b_n en fonction de n.
5. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le nombre entier $a_n + b_n$ est un multiple de 12.

Corrigé

$\boldsymbol{a_0 = 1, b_0 = 3, \forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = 2a_n + b_n}$ **et** $\boldsymbol{b_{n+1} = a_n + 2b_n}$

1. $\forall n \in \mathbb{N}, c_n = b_n - a_n$

   a. **Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, c_{n+1} = c_n$**

   Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= b_{n+1} - a_{n+1} = a_n + 2b_n - (2a_n + b_n) \\ &= a_n + 2b_n - 2a_n - b_n = -a_n + b_n = b_n - a_n = c_n \end{aligned}$$

   On a donc bien : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{c_{n+1} = c_n}$.

   b. **En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, b_n = a_n + 2$.**

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_{n+1} = c_n$ donc (c_n) est une suite constante,
   Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $c_n = c_0$, or $c_0 = b_0 - a_0 = 3 - 1 = 2$, donc $c_n = 2$,
   or $c_n = b_n - a_n$, donc : $b_n - a_n = 2$, autrement dit : $b_n = a_n + 2$.
   On a bien : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{b_n = a_n + 2}$.

2. **Justifier que pour tout entier naturel n : $a_{n+1} = 3a_n + 2$.**

   Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

   $a_{n+1} = 2a_n + b_n$, or : $b_n = a_n + 2$ donc : $a_{n+1} = 2a_n + a_n + 2$

autrement dit : $a_{n+1} = 3a_n + 2$.

On a donc bien : $\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{a_{n+1}} = \boldsymbol{3a_n + 2}$.

3. $\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{u_n = a_n + 1}$

a. Calculer $\boldsymbol{u_0}$.

$u_0 = a_0 + 1 = 1 + 1 = 2$.

$\boldsymbol{u_0 = 2}$

b. Montrer que $(\boldsymbol{u_n})$ est géométrique et préciser sa raison.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$u_{n+1} = a_{n+1} + 1 = 3a_n + 2 + 1 = 3a_n + 3 = 3(a_n + 1) = 3u_n$

On a donc : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3 \times u_n$ et 3 est une contante

donc $(\boldsymbol{u_n})$ **est géométrique de raison** $\boldsymbol{3}$.

c. Exprimer $\boldsymbol{u_n}$ en fonction de $\boldsymbol{n}$, en déduire $\boldsymbol{a_n}$ en fonction de $\boldsymbol{n}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$u_n = u_0 \times q^n \; (cours)$, or $u_0 = 2$ et $q = 3$ donc $u_n = 2 \times 3^n$.

$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2 \times 3^n$.

Or, $u_n = a_n + 1$, donc : $2 \times 3^n = a_n + 1$, autrement dit :

$$a_n = 2 \times 3^n - 1$$

Conclusion : $\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{a_n = 2 \times 3^n - 1}$.

4. Exprimer $\boldsymbol{b_n}$ en fonction de $\boldsymbol{n}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a : $b_n = a_n + 2$ et $a_n = 2 \times 3^n - 1$ donc $b_n = 2 \times 3^n - 1 + 2$.

Conclusion : $\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{b_n = 2 \times 3^n + 1}$.

5. Démontrer que pour tout $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^*$, l'entier $\boldsymbol{a_n + b_n}$ est un multiple de $\boldsymbol{12}$.

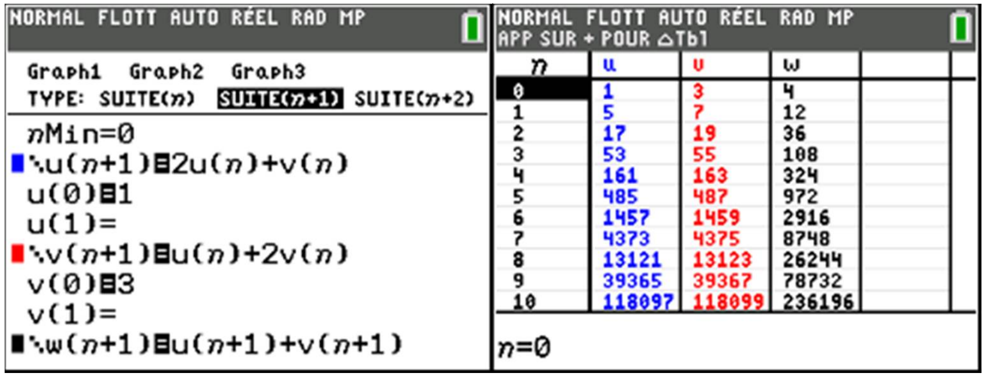
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$a_n + b_n = 2 \times 3^n - 1 + 2 \times 3^n + 1 = 2 \times 3^n + 2 \times 3^n = 4 \times 3^n$$
$$= 4 \times 3 \times 3^{n-1} = 12 \times 3^{n-1}$$

Or $n \in \mathbb{N}^*$ donc $n \geqslant 1$, par conséquent $3^{n-1} \in \mathbb{N}$.

Il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $a_n + b_n = 12 \times q$, à savoir $q = 3^{n-1}$, donc le nombre entier $\boldsymbol{a_n + b_n}$ **est un multiple de** $\boldsymbol{12}$.

Vérification



Défi Suites 19 **Deux suites imbriquées**

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par leurs premiers termes respectifs $u_0 = 10$, $v_0 = 0$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{4}{5}u_n + \frac{1}{5}v_n \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5}v_n$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $s_n = u_n + v_n$.
À l'aide de la calculatrice, visualiser les cinq premiers termes de (u_n), (v_n) et (s_n).
En déduire une conjecture sur la nature de (s_n) puis démontrer cette conjecture.

2. **a.** Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{3}{5}u_n + 2$.

b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x = \frac{3}{5}x + 2$.
Donner sa solution c sous forme de fraction irréductible.

3. Pour tout entier naturel n on pose : $w_n = u_n - c$.

a. Calculer w_0.

b. Montrer que (w_n) est géométrique et préciser sa raison.

c. Exprimer w_n en fonction de n, en déduire u_n en fonction de n.

4. Exprimer v_n en fonction de n.

5. Étude plus précise de (u_n)

a. Démontrer que (u_n) est strictement décroissante.

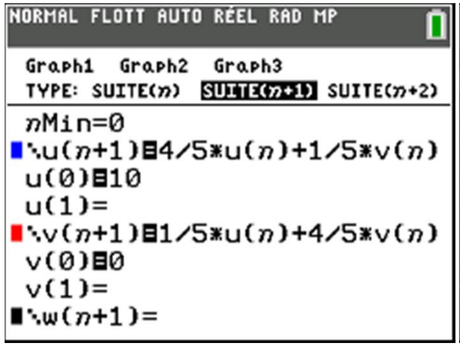
b. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 5$.

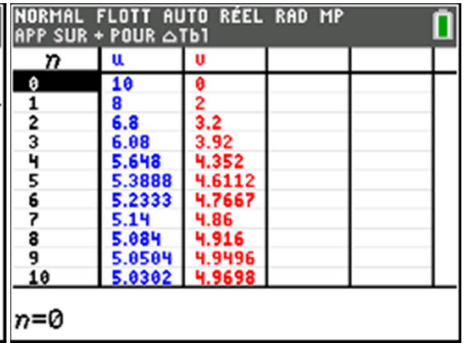
c. À l'aide d'un programme Python déterminer le plus petit entier naturel n_0 tel que : $u_{n_0} - 5 < 0{,}000\,001$.

Corrigé :

$\boldsymbol{u_0 = 10, v_0 = 0}$ **et** $\boldsymbol{\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{4}{5}u_n + \frac{1}{5}v_n}$ **et** $\boldsymbol{v_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5}v_n}$

1. Pour tout $\boldsymbol{n \in \mathbb{N}}$, on pose : $\boldsymbol{s_n = u_n + v_n}$. À l'aide de la calculatrice, visualiser les dix premiers termes des suites $\boldsymbol{(u_n)}$ et $\boldsymbol{(v_n)}$.





En déduire une conjecture sur la suite $\boldsymbol{(s_n)}$ puis la démontrer.

On constate que :

$u_0 + v_0 = 10$, donc : $s_0 = 10$

$u_1 + v_1 = 8 + 2 = 10$, donc : $s_1 = 10$

$u_2 + v_2 = 6{,}8 + 3{,}2 = 10$, donc : $s_2 = 10$

et ainsi de suite.

On peut donc **conjecturer que : « pour tout $\boldsymbol{n \in \mathbb{N}, s_n = 10}$ »**.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$s_{n+1} = u_{n+1} + v_{n+1} = \frac{4}{5}u_n + \frac{1}{5}v_n + \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5}v_n = u_n + v_n = s_n$$

$\forall n \in \mathbb{N}, s_{n+1} - s_n = 0$ et 0 est une constante donc la suite (s_n) est arithmétique de raison 0, donc c'est une suite constante.

On en déduit que : $\forall n \in \mathbb{N}, s_n = s_0$.

Or, $s_0 = u_0 + v_0 = 10 + 0 = 10$, donc on a bien : $\boldsymbol{\forall n \in \mathbb{N}, s_n = 10}$.

2. **a. Justifier que, pour tout $\boldsymbol{n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{3}{5}u_n + 2}$.**

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a d'après la question précédente : $u_n + v_n = 10$, autrement dit : $v_n = 10 - u_n$.

Or,

$$u_{n+1}=\frac{4}{5}u_n+\frac{1}{5}v_n$$

donc :

$$u_{n+1}=\frac{4}{5}u_n+\frac{1}{5}(10-u_n)=\frac{4}{5}u_n+\frac{1}{5}\times 10-\frac{1}{5}u_n=\frac{3}{5}u_n+2$$

On a donc bien :

$$\forall \boldsymbol{n}\in\mathbb{N}, \boldsymbol{u_{n+1}}=\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}}\boldsymbol{u_n}+\mathbf{2}$$

b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x=\frac{3}{5}x+2$.

Donner sa solution c sous forme de fraction irréductible.

On a les équivalences :

$$x=\frac{3}{5}x+2 \Leftrightarrow \frac{5}{5}x-\frac{3}{5}x=2 \Leftrightarrow \frac{2}{5}x=2 \Leftrightarrow x=\frac{2}{\frac{2}{5}} \Leftrightarrow x=2\times\frac{5}{2}$$

$$\Leftrightarrow x=5$$

L'équation de départ admet pour unique solution : 5, donc : $\boldsymbol{c}=\mathbf{5}$.

3. Pour tout entier naturel n on pose : $\boldsymbol{w_n}=\boldsymbol{u_n}-\boldsymbol{c}=\boldsymbol{u_n}-\mathbf{5}$.

a. Calculer $\boldsymbol{w_0}$.

$w_0=u_0-5=10-5=\mathbf{5}$

b. Montrer que $(\boldsymbol{w_n})$ est géométrique et préciser sa raison.

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a :

$$w_{n+1}=u_{n+1}-5=\frac{3}{5}u_n+2-5=\frac{3}{5}u_n-3=\frac{3}{5}\left(u_n-\frac{3}{\frac{3}{5}}\right)$$

$$=\frac{3}{5}\left(u_n-3\times\frac{5}{3}\right)=\frac{3}{5}(u_n-5)=\frac{3}{5}w_n$$

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $w_{n+1}=\frac{3}{5}w_n$ et $\frac{3}{5}$ est une constante donc (w_n) est géométrique de raison $\frac{3}{5}$.

c. Exprimer $\boldsymbol{w_n}$ en fonction de $\boldsymbol{n}$, en déduire $\boldsymbol{u_n}$ en fonction de $\boldsymbol{n}$.

Soit $n\in\mathbb{N}$, on a : $w_n=w_0\times q^n$ $(cours)$, or : $w_0=5$ et $q=\frac{3}{5}$

donc : $w_n=5\times\left(\frac{3}{5}\right)^n$.

$\forall n\in\mathbb{N}, w_n=5\times\left(\frac{3}{5}\right)^n$

On a : $w_n=u_n-5$, donc : $u_n=w_n+5$, or $w_n=5\times\left(\frac{3}{5}\right)^n$, donc :

$$\forall \boldsymbol{n}\in\mathbb{N}, \boldsymbol{u_n}=\mathbf{5}\times\left(\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}}\right)^{\boldsymbol{n}}+\mathbf{5}$$

4. Exprimer $\boldsymbol{v_n}$ en fonction de $\boldsymbol{n}$.

Soit $n\in\mathbb{N}$, on a : $u_n+v_n=10$, donc : $v_n=10-u_n$, or $u_n=5\times\left(\frac{3}{5}\right)^n+5$,

donc :

$$v_n=10-\left(5\times\left(\frac{3}{5}\right)^n+5\right)=10-5\times\left(\frac{3}{5}\right)^n-5=5-5\times\left(\frac{3}{5}\right)^n$$

On a donc :

$$\forall \boldsymbol{n}\in\mathbb{N}, \boldsymbol{v_n}=\mathbf{5}-\mathbf{5}\times\left(\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}}\right)^{\boldsymbol{n}}$$

5. Étude plus précise de la suite $(\boldsymbol{u_n})$

a. Démontrer que la suite $(\boldsymbol{u_n})$ est strictement décroissante.

Soit $n\in\mathbb{N}$, on a :

$$u_{n+1}-u_n=5\times\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}+5-\left(5\times\left(\frac{3}{5}\right)^n+5\right)$$

$$=5\times\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}+5-5\times\left(\frac{3}{5}\right)^n-5=5\times\frac{3}{5}\times\left(\frac{3}{5}\right)^n-5\times\left(\frac{3}{5}\right)^n\times 1$$

$$=5\times\left(\frac{3}{5}\right)^n\left[\frac{3}{5}-1\right]=5\times\left(\frac{3}{5}\right)^n\times\left(-\frac{2}{5}\right)=-2\times\left(\frac{3}{5}\right)^n$$

$$u_{n+1}--u_n=-2\times\left(\frac{3}{5}\right)^5$$

Or, $\left(\frac{3}{5}\right)^n>0$ et $-2<0$, donc : $u_{n+1}-u_n<0$.

$\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}-u_n<0$ donc (u_n) est strictement décroissante.

b. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 5$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_n - 5 = 5 \times \left(\frac{3}{5}\right)^n + 5 - 5 = 5 \times \left(\frac{3}{5}\right)^n$$

Or, $\left(\frac{3}{5}\right)^n > 0$ et $5 > 0$ donc : $5 \times \left(\frac{3}{5}\right)^n > 0$

On a donc : $u_n - 5 > 0$, autrement dit : $u_n > 5$.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 5$.

c. À l'aide d'un programme Python déterminer le plus petit entier naturel n_0 tel que : $u_{n_0} - 5 < 0{,}000\,001$.

```
U=10
n=0
while (U-5)>=0.000001:
    U=3/5*U+2
    n=n+1
print("n_0=",n)
```

```
Shell
>>> %Run '1E suitesDéfi 19.py'
 n_0= 31
```

On a donc : $n_0 = 31$.

vérification :

$u_{n_0} - 5 < 0{,}000\,001 \Leftrightarrow u_{n_0} < 5{,}000\,001$

```
NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP
u(30)
                    5.000001105
u(31)
                    5.000000663
```

u(30) : X

u(31) : ✓

Défi Suites 20 **Python : utilisation d'une liste**

On pose $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n - 1$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. Le programme Python ci-dessous demande à l'utilisateur d'entrer un entier naturel puis construit la liste L dont les éléments sont $u_0, u_1, \ldots, u_n$ et affiche cette liste :

```
01 U=3
02 L=[]
03 n=int(input("n="))
04 for k in range(n+1):
05     L.append(U)
06     
07 print("liste demandée :",L)
```

Compléter la ligne 06.

3. Ajouter une ligne de code à ce programme pour qu'il affiche aussi la somme des termes de u_0 à u_n.

Rappel Python La somme des terme d'une liste L est donnée par : `sum(L)`

Faire tourner ce programme pour $n = 10$, en déduire la valeur de : $u_0 + u_1 + \cdots + u_9 + u_{10}$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $v_n = u_n - 1$ et on pose :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + \cdots + u_n$$

a. Calculer v_0.

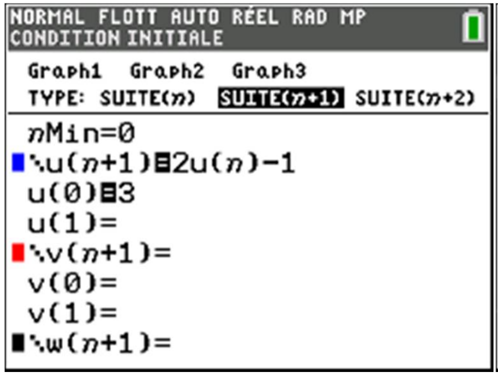
b. Démontrer que (v_n) est géométrique et préciser sa raison.

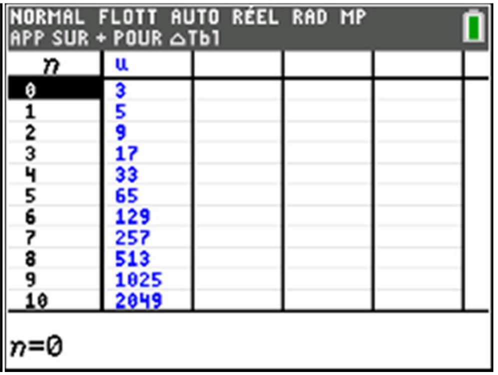
c. Exprimer la somme des termes de v_0 à v_n en fonction de n.

d. En déduire la formule explicite de S_n.
Vérifier qu'elle est compatible avec la réponse donnée en **3.**

Corrigé

$\boldsymbol{u_0 = 3}$ **et** $\boldsymbol{\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n - 1.}$





1. **Calcul de $\boldsymbol{u_1}$, $\boldsymbol{u_2}$ et $\boldsymbol{u_3}$**

   On a : $u_1 = 2u_0 - 1 = 2(3) - 1 = \mathbf{5}$

   $u_2 = 2u_1 - 1 = 2(5) - 1 = \mathbf{9}$

   $u_3 = 2u_2 - 1 = 2(9) - 1 = \mathbf{17}$

2. **Compléter la ligne 06**

   La ligne 06 est : « U=2*U-1 »

   Version complète du programme :

```
01 U=3
02 L=[]
03 n=int(input("n="))
04 for k in range(n+1):
05     L.append(U)
06     U=2*U-1
07 print("liste demandée :",L)
```

3. **Affichage de la somme des termes de $\boldsymbol{u_0}$ à $\boldsymbol{u_{10}}$**

   Il suffit d'ajouter en ligne 08, par exemple :

   print("somme = ",sum(L))

   On obtient pour $u_0 + \cdots . + u_{10}$ le nombre : $\mathbf{4\,105}$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n = u_n - 1 \text{ et } S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + \cdots + u_n$$

a. Calcul de $\boldsymbol{v_0}$

$v_0 = u_0 - 1 = 3 - 1 = 2$

b. Démontrer que $(\boldsymbol{v_n})$ est géométrique et préciser sa raison.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 1 = 2u_n - 1 - 1 = 2u_n - 2 = 2(u_n - 1) = 2v_n$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 2v_n$ et 2 est une constante donc la suite (v_n) est géométrique de raison 2.

c. Exprimer la somme des termes de $\boldsymbol{v_0}$ à $\boldsymbol{v_n}$ en fonction de $\boldsymbol{n}$.

D'après la formule du cours : $v_0 + \cdots + v_n = v_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Or $v_0 = 2$ et $q = 2$ donc :

$$v_0 + \cdots + v_n = 2 \times \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} = 2 \times (2^{n+1} - 1) = 2^{n+2} - 2$$

On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_0 + \cdots + v_n = 2^{n+2} - 2$.

d. En déduire la formule explicite de $\boldsymbol{S_n}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
&S_n \\
&= u_0 + u_1 + \cdots + u_n \\
&= v_0 + 1 + v_1 + 1 + \cdots + v_n + 1 \\
&= v_0 + v_1 + \cdots + v_n + 1 + 1 + \cdots + 1 \\
&= 2^{n+2} + (n+1) \times 1 \\
&= 2^{n+2} - 2 + n + 1 \\
&= 2^{n+2} + n - 1
\end{aligned}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = 2^{n+2} + n - 1$.

Vérifier qu'elle est compatible avec la réponse donnée en 3.

D'après la formule précédente :

$$S_{10} = 2^{10+2} + 10 - 1 = 2^{12} + 9 = 4096 + 9 = \mathbf{4\,105}$$

Ce résultat est bien accord avec celui de la question 3.